SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

"TEORIA SPETTRALE ED EQUAZIONI SINGOLARI"

BOLOGNA, 12 GENNAIO 1984

1. INTRODUZIONE

Voglio raccontare alcuni risultati che ho ottenuto ultimamente sulla risolubilità dell'equazione in spazi di Banach

$$(1) \qquad MBu + Lu = h,$$

dove B è un operatore chiuso dallo spazio di Banach complesso E in sé e M,L operano da E in uno spazio di Banach F, che può differire da E; vedremo però che per certi aspetti, l'equazione

$$(2) \qquad BMu + Lu = h,$$

dove questa volta L,M agiscono da F in E, è più facile da trattare e le richieste da fare a h per la sua risolubilità sono meno onerose.

Naturalmente, si assumerà che M *non* è invertibile, anche se è ben noto che l'invertibilità di M non implica affatto, in generale, che (1) o (2) siano ben poste.

Fondamentalmente, farò uso dell'ipotesi che $z = 0$ sia una singolarità polare per $(L^{-1}M+z)^{-1}$ o per $(ML^{-1}+z)^{-1}$. A dire il vero, si sarebbe tentati, a prima vista, di studiare il problema sotto l'ipotesi che $z = 0$ sia un polo per $(M+z)^{-1}$, ma basta rifletterci un momento sopra per rendersi conto che la presenza di L può avere una grande influenza. Vedremo però che sotto certe condizioni, risultati di esistenza possono essere dedotti solo sulla base della condizione che $z = 0$ sia un polo per $(M+z)^{-1}$.

Nel lavoro [5] si erano date delle condizioni in $L(zM+L)^{-1}$ e sul commutatore $[B; L(zM+L)^{-1}]$ sufficienti ad assicurare esistenza ed

unicità della soluzione di (1) o di (2). Tali condizioni si semplificano nel caso in studio attualmente, come si vedrà, ma proveremo che in ogni caso esse portano, almeno sulla situazione più generale, ad equazioni di ordine ≥ 0 in B.

Nel caso in cui $B = d/dt$, mentre M e L sono operatori definiti da matrici a coefficienti numerici, il problema è stato considerato da parecchi autori: vedi [1, 4, 6] . E' ben noto che allora $z = 0$ è un polo per i risolventi che abbiamo introdotto sopra. Ma se si ricorda la teoria spettrale degli operatori ellittici, ben si capisce che certi problemi alle derivate parziali possono essere inquadrati nella nostra teoria.

Per esempio si consideri il problema

$$\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t,x), \quad 0<x<m\pi, 0\leq t\leq T$$

$$u(0,x) = u_0(x),$$

$$u(t,0) = u(t,h\pi) = 0,$$

dove h è un intero positivo.

L'equazione è stata studiata in matematica applicata perché di grande interesse fisico; nel 1973 J. LAGNESE [8] sviluppò una tecnica che permetteva di inquadrare il problema nella forma astratta (1). Sostanzialmente essa si basava sulla decomposizione dello spazio ambiente come somma diretta $N(M) \oplus R(M)$, dove $N(M)$ è lo spazio nullo di M e $R(M)$ denota l'immagine di M.

Si vede facilmente che $z = 0$ è un polo semplice, per l'operatore in $L^2(0,T; L^2(0,m\pi))$ definito da $(z+M)^{-1}$, dove $(Mu(t))(x) = (1+\partial^2/\partial x^2)u(t,x)$, $u(t,0) = u(t,m\pi) = 0$ (e quindi $D(M) = L^2(0,T;H_0^1(0,m\pi) \cap H^2(0,m\pi)))$.

Per mezzo dei risultati astratti da me raggiunti si ottengo

no in modo molto semplice le condizioni a cui devono soddisfare F e u_0 perché (3) abbia soluzione.

Prima di esporre la teoria riguardante (1) e (2), è opportuno richiamare alcune cose concernenti le singolarità isolate del risolvente di un operatore chiuso. Tali risultati si possono trovare, per esempio, sul libro di YOSIDA [9] e sono sostanzialmente dovuti a A. TAYLOR.

2. PRELIMINARI

Sia λ_0 un punto singolare isolato del risolvente $R(\lambda;T) = (\lambda-T)^{-1}$ di un operatore lineare chiuso T in uno spazio di Banach complesso X. Allora vale la formula

$$R(\lambda;T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n A_n \qquad A_n = (2\pi i)^{-1} \int_C (\lambda-\lambda_0)^{-n-1} R(\lambda;T)d\lambda,$$

dove C è la circonferenza : $|\lambda-\lambda_0| = \varepsilon$, ε è scelto in modo che il cerchio $|\lambda-\lambda_0|\leq \varepsilon$ non contiene altra singolarità diversa da λ_0 e C è percorsa in senso antiorario. Si ha

Lemma. Per ogni $n \geq 0$, $A_n = (T-\lambda_0 I)A_{n+1}$,

$(T-\lambda_0 I)A_{-n} = A_{-(n+1)} = (T-\lambda_0 I)^n A_{-1}$, $n \geq 1$,

$(T-\lambda_0 I)A_0 = A_{-1}-I$.

Il risultato che sta alla base della nostra trattazione del problema è allora il seguente:

Teorema 1. Se λ_o è un polo di $R(\lambda;T)$ di ordine m, allora λ_o è un autovalore di T e

$$R(A_{-1}) = N(\lambda_o I-T)^n), \quad R(I-A_{-1}) = R(\lambda_o I-T)^n)) = N(A_{-1})$$

per ogni $n \geq m$ e quindi

$$X = N((\lambda_o I-T)^n) \oplus R(\lambda_o I-T)^n), \text{ per } n \geq m .$$

Segue che

$$A_{-1} = (2\pi i)^{-1} \int_C R(\lambda;T)d\lambda$$

è un operatore limitato soddisfacente $A_{-1}^2 = A_{-1}$; esso è dunque una proiezione e porremo $A_{-1} = P$.

Sotto una ulteriore condizione, si può invertire la implicazione nel Teorema 2. Infatti,

Teorema 2. Se T è limitato e $R(A_{-1})$ è un sottospazio di X di dimensione finita, allora λ_o è un polo di $R(\lambda;T)$.

3. L'EQUAZIONE $MBu + Lu = h$ NEL CASO COMMUTATIVO

Come si è detto sull'introduzione, M e L sono operatori chiusi da E in F, mentre B è chiuso da E in sé.

Per evitare complicazioni, mettiamoci nell'ipotesi che M sia limitato e che L abbia inverso continuo.

Allora la (1) è equivalente a

(3) $$L^{-1}MBu + u = L^{-1}h.$$

Si noti, e questo verrà utile in seguito, che $L^{-1}h$, il nuovo dato, appartiene a $D(L)$.

Posto $S = L^{-1}M$, supporremo che $z = 0$ sia un polo di ordine m per il risolvente $(z-S)^{-1} = R(z;S)$, cosicché $E = N(S^m) \oplus R(S^m)$ [Teorema 1.1].

L'ipotesi di commutatività a cui abbiamo accennato nel titolo del paragrafo è allora:

Per ogni $z \in \rho(S)$ = l'insieme risolvente di S, e per ogni $x \in D(B)$, $(z-S)^{-1}x \in D(B)$ e $(z-S)^{-1}Bx = B(z-S)^{-1}x$.

Denotando, come in § 2, con P la proiezione su $N(S^m)$, (3) risulta chiaramente equivalente al sistema

(4) $$PSPBPu + Pu = Pf \ , \ f = L^{-1}h,$$

(5) $$(1-P)S(1-P)B(1-P)u+(1-P)u = (1-P)f.$$

Posto $S_2 = (1-P)S(1-P) = S(1-P)$, S_2 risulta limitato da $R(S^m)$ in sé, ma ha anche inverso limitato.

Ora, $B_2 = (1-P)B(1-P)$ coincide, per l'ipotesi di commutatività, con la restrizione di B a $R(S^m)$. Allora risolvere (5) equivale a risolvere

$$B_2(1-P)u + S_2^{-1}(1-P)u = S_2^{-1}(1-P)f.$$

A questa equazione si vogliono applicare le tecniche operazionali usuali. A tal fine, si suppone che B ha inverso limitato (e quindi anche B_2 ha queste proprietà).

E' allora ben noto che se S_2^{-1} ha norma piccola (vedi [7], p. 197), anche $B_2+S_2^{-1}$ è invertibile e (5) ha così una unica soluzione per ogni f.

Se, invece, si suppone che $\|(B-z)^{-1};\ L(E)\| \leq M\,(1+|z|)^{-1}$ per $\mathrm{Re}\, z \leq a_o - b_o|\mathrm{Im} z|$, con $a_o, b_o > 0$, in modo che $\sigma(T_2^{-1})$ è contenuto nel settore aperto, allora la tecnica DA PRATO-GRISVARD può essere applicata e

$$(1-P)u = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (T_2^{-1} + z)^{-1} \ (B_2 - z)^{-1}\, T_2^{-1}(1-P)f\ dz,$$

dove Γ: $|\lambda| = r_1$, essendo r_1 scelto in modo che $\sigma(T_2^{-1}) \subset S(0;r_1) \subset$ $\subset \mathrm{Re} z < a_o - b_o|\mathrm{Im} z|$, fornisce l'unica soluzione di (5). Per quanto riguarda (4), osserviamo che in forza del LEMMA in § 2, $S^n P = 0$ per ogni $n \geq m$. Così, se $Pf \in D(B)$ [in particolare, se $f \in D(B)$] e Pu soddisfa (4), allora è facile vedere che

$$B^2 S_1^2 Pu = Pu - Pf + S_1\ BPf,$$

dove S_1 denota la restrizione di S a $N(S^m)$.

Iterando il ragionamento, si vede che se $Pf \in D(B^{m-1})$, allora

$$0 = B^m S_1^m\ Pu = (-1)^m\ Pu + \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{m+1+s}\ S_1{}^s B^s Pf.$$

In base a ciò si prova facilmente

<u>Teorema 3.1.</u> Sotto le assunzioni precedenti, se $PL^{-1}h \in D(B^m)$, allora (1) ha l'unica soluzione

$$u = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j\ S_1^j\ B^j PL^{-1}h + u_1,$$

dove u_1 soddisfa (5), con $f = L^{-1}h$.

Cosa si può dire se M è anch'esso non limitato? E' chiaro che in generale la considerazione di $L^{-1}M$ come operatore in E riserva in partenza delle difficoltà: esso può non essere chiuso. Conviene allora supporre $D(L) \subseteq D(M)$ e vedere allora $L^{-1}M$ come operatore limitato da $D(L)$ in sé. Poiché $(z+L^{-1}M)^{-1}$ coincide, almeno formalmente, con $(zL+M)^{-1}L$ e L è limitato da $D(L)$ a E, si è indotti a supporre che $z = 0$ è un polo per $L(zL+M)^{-1} = (z+ML^{-1})^{-1}$ ed allora si possono ripetere i discorsi che hanno condotto al Teorema 3.1 perché la parte B_1 di B in $D(L)$ soddisfa $(zL+M)^{-1}LB_1u = B_1(zL+M)^{-1}Lu$, per ogni $u \in D(B_1)$.

Naturalmente, tutto procede facilmente, senza bisogno di introdurre la considerazione di $D(L)$, se abbiamo a che fare con la (1) in cui L è la moltiplicazione per un numero $\ell \neq 0$.

Esempio 3.2. Sia A un operatore lineare chiuso nello spazio di Banach complesso X, a dominio $D(A)$ denso in X. Sia δ^{-1} un autovalore di A con moltiplicità $m \geq 1$. Si consideri il problema di Cauchy

$$(6) \qquad \begin{cases} (i-\delta A)u'(t) + Au(t) = h(t), & 0<t\leq T<\infty, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Posto $u(t) = e^{\delta^{-1}t}v(t)$, (6) viene trasformato in

$$\begin{cases} (1-\delta A)v'(t) + \delta^{-1}v(t) = e^{-\delta^{-1}t}h(t) = f(t), & 0<t\leq T, \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Scegliamo come E lo spazio $L^P(0,T;X)$, come M l'operatore $(Mu)(t) = (1-\delta A)u(t)$, $B : L^P(0,T;X) \to L^P(0,T;X)$ $(Bu)(t) = u'(t)$, $D(B) = W_0^{1,P}(0,T;X)$, $p > 1$.

Allora il Teorema 3.1 assicura che se $Pf \in W_0^{m,P}(0,T;X)$, dove P è la proiezione definita da

$$(2\pi i)^{-1} \int_C (z-\delta+\delta^2 A)^{-1}\, dz,$$

allora (6) ha una ed una sola soluzione stretta.

Si potrebbe considerare anche il problema analogo a (6) con condizione iniziale non nulla, $u(0) = u_0$. Supponendo, per semplicità, $u_0 \in D(A)$, il cambiamento di variabile $u(t)-u_0 = w(t)$ lo muta in

$$\begin{cases} (1-\delta A)w'(t)+Aw(t) = h(t)-Au_0, \; 0<t\leq T, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Dunque, si avrà soluzione se $e^{-\delta^{-1}t}P\{h(t)-Au_0\} \in W_0^{m,P}(0,T;X)$. In particolare, dovremo avere la condizione di compatibilità $P\left[h(0)-Au_0\right]=0$.

Vediamo che forma prende tutto questo quando A è l'operatore $-\partial^2/\partial x^2$, con condizioni ai limiti nulli, che ci dà il problema in § 1. In questo caso $m = 1$, come si riconosce facilmente, e

$$Pu(t,x) = \frac{2}{\pi l} \operatorname{sen} x \int_0^{\ell\pi} u(t,\xi) \operatorname{sen} \xi \, d\xi.$$

Di qui, se $u_0 \in H_0^1(0,l\pi) \cap H^2(0,l\pi)$, il problema ha una soluzione (unica) se, per esempio,

$$\operatorname{sen} x \int_0^{\ell\pi} \left[e^{-t}F(t,\xi) - u_0(\xi)\right] \operatorname{sen} \xi \, d\xi \text{ è di classe } C^{(1)}$$

e $\displaystyle\int_0^{\ell\pi} \{F(0,\xi) - u_0(\xi)\} \operatorname{sen} \xi \, d\xi = 0.$

4. L'EQUAZIONE $Bmu + Lu = h$ NEL CASO COMMUTATIVO

Ci mettiamo senz'altro nell'ipotesi che $D(L) \subseteq D(M)$, L ha inverso limitato, in modo che $ML^{-1} = T \in L(E)$. La (2), posto $Lu = v$ diventa

$$BTv + v = h \tag{7}$$

e non ci sono problemi sulla scelta dello spazio in cui considerare (7).

Supposto $z = 0$ un polo di ordine m per $R(z;T)$, si possono ripetere le considerazioni che ci hanno portato al Teorema 3.1, perché per ogni $x \in D(B)$, $Tx \in D(B)$ e $TBx = BTx$ (e quindi per ogni $z \in \rho(T)$, $(z-T)^{-1}Bx = B(z-T)^{-1}x$, $x \in D(B)$). Posto $P = (2\pi i)^{-1} \int_C (z-T)^{-1}\, dz$, se B_2 e T_2 soddisfano le ipotesi che precedono il Teorema 3.1, noi riconosciamo che vale il

Teorema 4.1.. Sotto tutte le assunzioni precedenti, se $T^jPh \in D(B^j)$ per $j = 1,2,\dots,m-1$, allora (2) ha una ed una sola soluzione u, data da

$$u = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j L^{-1} B^j T_1^j \, Ph + u_1, \quad u_1 = L^{-1} v_1,$$

dove T_1 denota la restrizione di T a $N(T^m)$ e v_1 è l'unica soluzione del problema non degenere

$$BT_2(1-P)v_1 + (1-P)v_1 = (1-P)h,$$

T_2 essendo la restrizione di T a $R(T^m)$.

Esempio 4.2. Consideriamo il problema

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,((1-\delta A)u(t)) + Au(t) = h(t)\ , \quad 0<t\leq T, \\ \lim\limits_{t\downarrow 0}\,(1-\delta A)u(t) = 0 \end{cases}$$

dove A è come nell'Esempio 4.2. Posto $u(t) = e^{\delta^{-1}t}v(t)$, (8) diventa

$$\frac{d}{dt}\,((1-\delta A)v(t)) + \delta^{-1}\,v(t) = e^{-\delta^{-1}t}h(t),\ 0<t\leq T,$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\,(1-\delta A)v(t) = 0$$

ed il Teorema 4.1. si applica immediatamente.

Notiamo esplicitamente che se δ^{-1} è un polo semplice per $(z-A)^{-1}$, non c'è, a differenza di quanto si è visto nel § 3, alcuna condizione da imporre a h.

5. IL CASO IN CUI $z = 0$ E' UN POLO PER $(z+M)^{-1}$

Abbiamo visto nei §§ 3 e 4 che è fondamentale il ruolo del risolvente modificato $(zL+M)^{-1}$. Ora, ameno che non ci mettiamo in situazioni particolari [L,M operatori definiti da matrici] può essere difficile studiare l'invertibilità di $zL+M$; al contrario, se $E = F$, le proprietà spettrali di M potrebbero risultare ben conosciute. In questo paragrafo vedremo di dare una condizione sugli operatori che permettono di dedurre risultati di esistenza per (1) o (2) semplicemente sulla base di proprietà di $(z + M)^{-1}$.

Supponiamo $D(M) \subseteq D(L)$, in contrasto a quel che si è supposto finora; ma vedremo che questa è la situazione migliore. Assumiamo anche che per un certo $c \neq 0$, $cM+L$ è chiuso. Allora (2) viene posta nella forma $B_1Mu + (cM+L)u = h$, con $B_1 = B-c$. Se B_1 soddisfa le proprietà che abbiamo richiesto per B nei paragrafi precedenti [e nelle applicazio

ni, ciò in generale è vero] , otteniamo una equazione di tipo (2) con $D(L) = D(M)$. Assumiamo dunque fin dall'inizio che L e M abbiano lo stesso dominio.

Naturalmente, come detto all'inizio, $z = 0$ sia un polo di ordine m per $(z + M)^{-1}$. L'ipotesi fondamentale è questa: L ed M commutano, nel senso che $\forall z' \in \rho(L)$, $\forall z'' \in \rho(M)$ risulta $(z'-L)^{-1}(z''-M)^{-1} = (z''-M)^{-1}(z'-L)^{-1}$. Fermo restando che anche B a L commutino, denotando sempre con P la proiezione su $N(M^m)$, (2) si scrive nella forma

(9) $$BMPu + LPu = Ph$$

(10) $$BM(1-P)u + L(1-P)u = (1-P)h.$$

Sia $\tilde{M}$ la restrizione di M a $R(M^m)$. Poiché $L\tilde{M}^{-1}$ è limitato, le ipotesi che abbiamo fatto implicano che (10) è univocamente risolvibile per ogni h.

Veniamo a (9). Adoperando lo stesso metodo che ci ha portato a risolvere la (4), si vede facilmente che se $Ph \in D(B^{m-1})$, allora (9) ha l'unica soluzione

$$Pu = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k B^k M^k L^{-(k+1)} Ph.$$

Se $D(L) \supseteq D(M)$, è chiaro che (2) è ancora equivalente al sistema (9)-(10), ma questa volta $L\tilde{M}^{-1}$ non è a priori limitato e quindi per avere condizioni sufficienti di risolubilità, dovremmo fare appello a proprietà spettrali di $L\tilde{M}^{-1}$ e quindi a proprietà di $(zM+L)^{-1}$, cosa che appunto noi volevamo evitare.

L'ipotesi onerosa è la commutatività di L e M. Naturalmente, supposto che $cM+L$ risulti invertibile per un $c \neq 0$, la (2) si scrive equivalentemente

$$BM(cM+L)^{-1}\, v + L(cM+L)^{-1} v = h$$

e adesso $M(cM+L)^{-1}$ e $L(cM+L)^{-1}$ sono operatori LIMITATI che COMMUTANO fra loro. Ma se adesso vogliamo che $z = 0$ sia un polo per $(z+M(cM+L)^{-1})^{-1}$, siamo costretti a fare delle ipotesi su $(M+zL)^{-1}$.

Finalmente, se vogliamo considerare la (1) sotto le ipotesi che abbiamo fatto prima, osserviamo che se $h \in D(B)$, allora (1) è equivalente a

(117 $\qquad BMBu + BLu = Bh,$

e per l'ipotesi di commutatività, (11) diventa

$$BMBu + LBu = Bh,$$

che è una equazione di tipo (2). Quindi se $h \in D(B)$ e $Ph \in D(B^m)$, (1) ha una unica soluzione.

<u>Esempio 5.1.</u> Siano A_0, A_1 due operatori lineari chiusi nello spazio di Banach complesso X, con $D(A_1) \subseteq D(A_0)$ denso in X, tali che per un certo $c \neq 0$, $cA_1 + A_0$ è chiuso e quindi si può anche supporre $D(A_0) = D(A_1)$.

Facciamo poi l'ipotesi di commutatività: $(\lambda+A_1)^{-1}(\mu+A_0)^{-1} = (\mu+A_0)^{-1}(\lambda+A_1)^{-1}$, $\lambda \in \rho(-A_1)$, $\mu \in \rho(-A_0)$. Supponiamo A_0 invertibile.

Sia δ^{-1} un autovalore (isolato) di A_1 con moltiplicità $m \geqq 1$. Consideriamo il problema

$$(12) \qquad \begin{cases} (1-\delta A_1)u'(t)u'(t) + A_0 u(t) = h(t), \; 0 < t \leqq T < \infty, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Se $u_o \in D(A_o)$,(12) equivale a

$$(13) \qquad \begin{cases} (1-\delta A_1)w'(t) + A_o w(t) = h(t) - A_o u_o, \ 0 < t \leq T, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

In forza dei risultati precedenti, abbiamo che se $h \in W^{m,p}(0,T;X)$ con $h(0) = A_o u_o$, $h'(0) = h''(0) = \ldots = h^{-m-1)}(0) = 0$, allora il problema (12) ha soluzione. Questa è naturalmente solo una condizione sufficiente. Più in generale, posto $u(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j} u_j = w(t)$ noi vediamo che (12) diventa, purché $u_j \in D(A_o)$ ($= D(A_1^j)$ come si è supposto),

$$(1-\delta A_1)w'(t)+A_o w(t) = h(t)- \left[A_o u_o-(1-\delta A_1)\, u_1\right] -t\left[A_o u_1-(1-\delta A_1)u_2\right]$$
$$- \ldots - \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\left[A_o u_{m-2}-(1-\delta A_1)u_{m-1}\right]- \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} A_o u_{m-1}.$$

Ma noi sappiamo allora che se $h \in W^{m,p}(0,T;X)$ con $h(0) = A_o u_o-(1-\delta A_1)u_1$, $h'(0) = A_o u_1-(1-\delta A_1)u_2$, $h''(0) = A_o u_2-(1-\delta A_1)u_3, \ldots$, $h^{(m-2)}(0)=A_o u_{m-2}-(1-\delta A_1)u_{m-1}$ $h^{(m-1)}(0) = A_o u_{m-1}$, allora (12) ha una soluzione stretta.

In forza della invertibilità di A_o, partendo da $u_{m-1} = A_o^{-1} h^{(m-1)}(0)$, $u_{m-2} = A_o^{-1}\left[h^{(m-2)}(0) + (1-\delta A_1)A_o^{-1}\, h^{(m-1)}(0)\right]$, noi risaliamo ad una espressione delle condizioni iniziali accettabili o ammissibili u_o.

Nelle applicazioni concrete, A_o e A_1 potrebbero essere degli operatori definiti da espressioni differenziali a coefficienti costanti: $\sum_{j=0}^{2m} a_j \frac{\partial^j}{\partial x^j}$, $\sum_{j=0}^{2p} b_j \frac{\partial^i}{\partial x^i}$, rispettivamente con $p \geq m$, definiti su $H^{2m}(\Omega) \cap H_o^m(\Omega)$ e $H^{2p}(\Omega) \cap H_o^p(\Omega)$, rispettivamente. Oppure si potrebbero considerare le medesime espressioni differenziali con condizioni di Newmann o altre.

6. IL CASO GENERALE

La soluzione di (2) che abbiamo ottenuto sotto le ipotesi dette deve chiaramente essere ritrovato col metodo operazionale che si è adoperato in [5].

Infatti, se $z = 0$ è un polo per $(z+ML^{-1})^{-1}$ di ordine m, allora $P(z)^{-1} = (zM+L)^{-1} = L^{-1}(zML^{-1}+1)^{-1} = (ML^{-1}=T) = z^{-1}L^{-1}(T+z^{-1})^{-1}$ è definito per $|z| \geq \varepsilon^{-1}$ e $\|LP(z)^{-1};\ L(E)\| \leq C|z|^{m-1}$.

Chiaramente, ci siamo rimessi nella condizione $D(L) \subseteq D(M)$.

Se B è un operatore chiuso, a dominio denso, tale che $(B-z)^{-1}$ esiste per tutti gli z: $|z| \leq r_1$, con $\varepsilon^{-1} < r < r_1$, sia Γ la circonferenza, orientata in senso antiorario, di raggio r, con $\varepsilon^{-1} < r < r_1$. Posto P la solita proiezione su $N(T^m)$, è facile vedere che la u trovata in [5], cioè

$$u = (2\pi i)^{-i} \int_\Gamma z^{-m}(zT+1)^{-1}(B-z)^{-1}B^m h\, dz, \tag{14}$$

coincide proprio con la u trovata sul Teorema 4.1.

Infatti, $u = [i] + [ii]$, dove

$$[i] = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma z^{-k}L^{-1}(B-z)^{-1}B^k(zT+1)^{-1}\, Phdz,$$

$$[ii] = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma z^{-k}\, L^{-1}(B-z)^{-1}\, B^k(zT+1)^{-1}(1-P)h\, dz.$$

Risulta $(zT+1)^{-1}\, Ph = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j\, z^j\, T_1^j\, Ph$ (T_1 è la parte di T sullo spazio nullo di T^m) e quindi è chiaro (basta utilizzare il Teorema dei residui) che

$$[i] = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j\, L^{-1}B^jT_1^j\, Ph.$$

Quanto a [ii], poiché non c'è problema di convergenza, essendo

la curva limitata, basta scrivere B^k come $(B-z+z)B^{k-1}$ ecc.. per ottenere che essa coincide con

$$(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma L^{-1}T_2^{-1}(z+T_2^{-1})^{-1}(1-P)(B-z)^{-1}(1-P)h\,dz =$$
$$= (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma L^{-1}(zT+1)^{-1}(1-P)(B-z)^{-1}(1-P)h\,dz.$$

Si è così ritrovata la formula del Teorema 4.1.

Rivolgiamoci ora al caso generale sotto le sole ipotesi, per ora, che 0 è un polo di ordine $m \geqq 1$ per $(z+T)^{-1}$, $T = ML^{-1}$. Si cerca una soluzione di (2) sotto la forma (14), con h sostituita da una conveniente $f \in D(B^m)$. In questo caso conviene esprimere u come

$$(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma z^{-m}L^{-1}(zT+1)^{-1}\,P(B-z)^{-1}B^m f\,dz +$$
$$+ (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma z^{-m}L^{-1}(zT+1)^{-1}(1-P)(B-z)^{-1}\,B^m f\,dz = [iii] + [iv].$$

Si veda subito che [iii] coincide con

$$[iii] = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j L^{-1} T_1^j\, P\, B^j f,$$

mentre

$$[iv] = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma L^{-1}\,T_2^{-1}(z+T_2^{-1})^{-1}(1-P)(B-z)^{-1}f\,dz =$$
$$= (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma L^{-1}(zT+1)^{-1}\,(1-P)(B-z)^{-1}\,f\,dz\,.$$

Ora è chiaro che in generale questa u non soddisfa (2) ma noi cerchiamo (niente altro che il metodo di variazione delle costanti!) se c'è una f opportuna che rende la nostra u proprio soluzione di (2).

Per $m = 1$, cioè nel caso in cui $z = 0$ è un polo semplice per $(z-ML^{-1})^{-1}$, si vede che la u soddisfa

$$BMu + Lu = f - [B;P]\, B^{-1}f - (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma z^{-1}[B;(zT+1)^{-1}]\,(1-P)(B-z)^{-1}f\,dz +$$

$$+ (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma z^{-1}\,(zT+1)^{-1}[B;P](B-z)^{-1}f\,dz,$$

supposto che $[B;P]$, $[B;(zT+1)^{-1}]$ siano ben definiti e risultino limitati da E in sé. Poiché l'ultimo addendo coincide con

$$[B;P]\,B^{-1}f - (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma T(zT+1)^{-1}\,[B;P]\,(B-z)^{-1}f\,dz,$$

si vede che se $\|(B-z)^{-1};\, L(E)\| \leq C(1+|z|)^{-1}$ con una costante C sufficientemente piccola (come si può supporre nelle applicazioni a cui miriamo), si applica il Teorema di Neumann e si ha soluzione per ogni h. Si noti che Γ in questo caso è una curva LIMITATA e non ci sono problemi di convergenza .

Per $m > 1$, la nostra u soddisfa invece

$$BMu + Lu = f - (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma z^{-1}[B;(zT+1)^{-1}]\,(1-P)(B-z)f\,dz +$$

$$- (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma T(zT+1)^{-1}[B;P](B-z)^{-1}f\,dz +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-2}(-1)^j\,[B;T^{j+1}]\,PB^jf + \sum_{j=0}^{m-2}(-1)^jT^{j+1}[B;P]B^jf.$$

Il caso $m = 2$ si distingue dagli altri perché in questa situazione la (2) si riduce ad una equazione "algebrica" in cui non compaiono potenze ≥ 1 di B. Denotata con Ff la somma del secondo e del terzo addendo nella formula precedente, il problema (2) avrà soluzione se c'è una $f \in D(B)$ tale che

$$f + Ff + [B;TP]f = h.$$

Questa equazione sarà senz'altro risolubile se, per esempio, $F+[B;TP]$ muta $D(B)$ in sé con norma piccola, ma in generale nulla può essere detto a priori, come vedremo con facili esempi.

Se $m > 2$, (2) riesce risolubile se esiste $f \in D(B^{m-1})$ tale che

$$(15) \qquad f + Ff + \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j \; [B;T^{j+1}P]B^j f = h.$$

Se $[B;T^{m-1}P]$ ha inverso limitato noi possiamo applicare a (15) le tecniche ben note del calcolo operazionale; altrimenti si ha una nuova equazione degenere e dalla (15) si ha solo informazione della forma di certi h per cui il problema (2) è risolubile.

<u>Osservazione 6.1.</u> Siano, L, $\tilde{L}$ due operatori lineari chiusi da F in E, aventi lo stesso dominio D denso in F. Assumiamo inoltre che $\tilde{L}$ ha inverso limitato, $M\tilde{L}^{-1}$ commuta con B e $z = 0$ è un polo semplice per il suo risolvente [oppure si potrebbe supporre che sono soddisfatte le ipotesi che si sono fatte nel § 5].

Di qui, c'è un operatore S limitato da $R(M\tilde{L}^{-1})$ in sé tale che $u = \tilde{L}^{-1}Pf + \tilde{L}^{-1}S(1-P)f$ fornisce la soluzione di $BMu + \tilde{L}u = f$. Se vogliamo che una tale u sia soluzione di (2), dobbiamo richiedere che f soddisfi

$$f - (I-L\tilde{L}^{-1}) \; [P+S(1-P)] \; f = h.$$

Di qui, se $I-L\tilde{L}^{-1}$ ha norma piccola in $L(E)$, noi abbiamo soluzione per (2).

Esempio 6.2. Sia $E = L^p(0,T;X)$, $p \in (1,+\infty)$, $B = d/dt$, $D(B) = W_0^{1,p}(0,T;X)$, X spazio di Banach complesso. Sia poi $M(t) \equiv M$, $\tilde{L}(t) = \tilde{L} = L(0)$. Allora $\|1-L\tilde{L}^{-1}; L(E)\|$ è piccola se

$$\int_0^T \|f(t)-L(t)L(0)^{-1}f(t); X\|^p dt \leq \delta \int_0^T \|f(t); X\|^p dt, \tag{16}$$

con $0 < \delta$ piccolo.

Se gli operatori $L(t)$ hanno dominio comune D_1 denso in X e

$$\|[L(t)-L(s)]\, L(r)^{-1}; L(X)\| \leq C|t-s|^{\alpha},\ 0<\alpha\leq 1,\ 0\leq t,r,s\leq T,$$

allora

$$\|f(t) - L(t)L(0)^{-1}f(t); X\| \leq Ct^{\alpha} \| f(t);X\|$$

e di qui (16) è soddisfatta con un δ piccolo se T è sufficientemente piccolo.

Esempio 6.3.. Siano $L(t)$, $M(t)$, $0\leq t\leq T$, due famiglie di operatori lineari chiusi da Y a X, X e Y due spazi di Banach complessi, tali che $D_1 \equiv D(L(t)) \subseteq D(M(t)) = D_2$, $L(t)$ è invertibile per ogni t. Inoltre, si assume che $t \to T(t) = M(t)L(t)^{-1}$ è continuo da $[0,T]$ a $L(X)$. Si pone $T \in L(L^p(0,T;X))$, $(Tu)(t) = T(t)u(t)$, di modo che, se L e M sono gli operatori indotti in $E = L^p(0,T;X)$ e $F = L^p(0,T;Y)$, risulta $T = ML^{-1}$.

Sia poi $z = 0$ una singolarità polare di ordine m per $(z+T(t))^{-1}$ per ogni $t \in [0,T]$. Risulta così

$$R(z;T(t)) = \sum_{n=m}^{+\infty} z^n A_n(t)\ ,\ A_n(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} z^{-(n+1)} R(z,T(t))dz$$

Per ragioni di continuità si può supporre che il raggio del-

la circonferenza γ non dipende da t.

L'assunzione fondamentale è che l'ordine del polo 0 sia costantemente uguale a m. Nel lavoro [5] si è considerato anche il caso in cui c'è variazione in questo ordine da t = 0 a t > 0. Si consideri il problema

$$(17)\qquad \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = h(t),\ 0<t\leqq T,$$
$$\lim_{t\downarrow 0} M(t)u(t) = 0.$$

Se m = 1, supposto che T(t) è di classe $C^{(1)}$ a valori in L(X), quanto si è visto sopra implica che (7) ha soluzione per ogni $h \in L^P(0,T;X)$.

Sia $P(t) = A_{-1}(t) = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma R(z,T(t))dz$.

Si ha, utilizzando le precedenti notazioni,

$$(Ff)(t) = -\int_0^t (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma z^{-1}\{\partial(zT(t)+I)^{-1}/\partial t\}(I-P(t))\, e^{z(t-s)}f(s)dz\, ds -$$
$$-\int_0^t (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma T(t)(zT(t)+I)^{-1}\, P'(t)\, e^{z(t-s)}f(s)\, dz\, ds,$$

$$([B;TP]\, f)(t) = \{\frac{d}{dt}(T(t)P(t))\}\, f(t),$$

e così, se m = 2 (polo doppio), (2) è risolubile se

$$h(t) = f(t) + (Ff)(t) + \{\frac{d}{dt}(T(t)P(t))\}f(t)\ ,\ 0<t<T.$$

Ora, tale equazione può avere soluzione per ogni $h \in W_0^{1,P}(0,T;X)$ oppure solo per certi h.

Se m > 2, si ottiene una condizione di risolubilità del tipo

$$(-1)^{m-2}(T(t)^{m-1}P(t))'f^{(m-2)}(t) +..+(T(t)P(t)f(t)+(Ff)(t) = h(t),$$

che può essere trattata mediante metodi ormai ben noti purché $(T(t)^{m-1}P(t))'$ definisca un operatore invertibile.

Esempio 6.4.. Sia $T = ML^{-1}$ un operatore nilpotente per cui $T^m = 0$ per un certo m intero ≥ 2. Allora $u = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j T^j B^j f$ risolve (2) se e solo se

$$f + \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j \left[B;T^{j+1}\right]B^j f = h. \tag{18}$$

E' facile vedere con esempi concreti che (18) può avere soluzione per ogni h oppure h deve soddisfare condizioni di compatibilità affinché una soluzione esista.

Siano α,β,γ: $[0,T] \to \mathbf{C}$ tre funzioni di classe $C^{(1)}$.

Posto

$$T(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & -\alpha(t) \end{bmatrix},$$

allora $z = 0$ è un polo doppio per $(z-T)^{-1}$, considerato come operatore in $L^p(0,T;C^2)$, $p > 1$, se e solo se $\alpha(t)^2 = -\beta(t)\gamma(t)$.

Assunto ciò, posto $h = (h_1,h_2)$, $f = (f_1,f_2)$, la (18) si legge

$$(\alpha'(t)+1)f_1 + \beta'(t)f_2 = h_1$$

$$\gamma'(t)f_1+(1-\alpha'(t))f_2 = h_2$$

e questo sistema è univocamente risolubile se e solo se

$$1-\alpha'(t)^2 - \beta'(t)\gamma'(t) \neq 0, \quad t \in [0,T].$$

Per esempio, sia $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = -1$, $\gamma(t) = t^2$.

Allora f deve soddisfare $2f_1 = h_1$, $2tf_1 = h_2$ e così il problema è risolubile (mancando però l'unicità) solo se $h_2 = th_1$. Questo risultato, d'altra parte, è facilmente ottenibile per verifica diretta.

Se invece $\alpha(t) = t, \beta(t)=-t, \gamma(t) = t$, allora (18) diventa

$$2f_1 - f_2 = h_1 \quad , f_1 = h_2,$$

sistema che ha una unica soluzione.

Esempio 6.5. Siano $A_0(t)$, A_1 operatori lineari chiusi nello spazio di Banach complesso X con dominio comune D per ogni $t\in [0,T]$.

Consideriamo l'equazione

$$d((1-\delta A_1)u(t))/dt + A_0(t)u(t) = h(t), \quad 0<t\leqq T,$$

insieme alla condizione iniziale

$$\lim_{t\downarrow 0} (1-\delta A_1)u(t) = 0.$$

Ci mettiamo nell'ipotesi che δ^{-1} sia un polo semplice di $(A_1-z)^{-1}$ e che $A_0(0)$ abbia le proprietà che ci permettono di applicare il Teorema 4.1. o i risultati dell'Esempio 5.1.

Se

$$\| [A_0(t)-A_0(s)]\, A_0(r)^{-1};\, L(x)\| \leqq c\, |t-s|^{\alpha}, \quad 0<\alpha\leqq 1, \quad 0\leqq r,s,t\leqq T,$$

allora quanto ottenuto nell'Esempio 6.2. porta alla risolubilità del no

stro problema per ogni $h \in L^p(0,T;X)$, per T abbastanza piccolo.

Notiamo, per finire, che la tecnica si applica anche ad altri tipi di problemi differenziali.

Esempio 6.6. Si consideri l'equazione del secondo ordine

$$A_2 B_1^2 u + A_1 B_1 u + A_0 u = h \tag{19}$$

dove A_0, A_1, A_2 sono lineari e chiusi da E in E, con $D(A_0) \subseteq D(A_1)$, $D(A_2)$ denso in E e B_1 è chiuso da E in sé e soddisfa le stesse proprietà introdotte nel § 2 per B.

Assumiamo inoltre che A_0 abbia inverso limitato.

Posto $B_1 u = v$, (19) prende la forma di sistema

$$A_0^{-1} A_1 B_1^2 u + A_0^{-1} A_2 B_1 v + u = A_0^{-1} h$$

$$- B_1 u + v = 0$$

Ora, il termine non omogeneo $\left[A_0^{-1} h, 0\right] \in D(A_0) x D(A_0) = E$ e gli operatori $A_0^{-1} A_1$, $A_0^{-1} A_2 \in L(D(A_0))$. Sia T l'operatore definito da $T\,[x,y] = \left[A_0^{-1} A_1 x + A_0^{-1} A_2 y, -x\right]$. Allora $T \in L\ (E)$.

Per quanto riguarda B_1, si assume che se $u \in D(B_1) \cap D(A_0)$ allora $B_1 u \in D(A_0)$ e $A_0^{-1} A_1 B_1 u = B_1 A_0^{-1} A_1 u$, $A_0^{-1} A_2 B_1 u = B_1 A_0^{-1} A_2 u$.

Posto $P(z) = z^2 A_0 + z A_1 + A_2$, formalmente vale

$$(T+z)^{-1}\ [f,g] = \left[zP(z)^{-1} A_0 f - P(z)^{-1} A_2 g,\ P(z)^{-1}\ A_0 f + P(z)^{-1}\ (zA_0 + A_1) g\right].$$

E' facile allora vedere che se $z = 0$ è un polo di ordine $m \geqq 1$ per $A_0 P(z)^{-1}$, allora $z = 0$ è un polo dello stesso ordine per $(T+z)^{-1}$.
Poiché

$$P\,[A_0^{-1}h,0] = (2\pi i)^{-1} \int_{|z|=\varepsilon} [zP(-z)^{-1}h,-P(z)^{-1}h]dz,$$

per applicare il Teorema 3.1. sarà sufficiente, ad esempio, assumere che B_1 commuti con gli operatori A_i e che h appartenga a $D(B_1^m)$.

Osservazione 6.7. Supponiamo che anche A_1 abbia inverso limitato, con $D(A_0) = D(A_1) \subseteq D(A_2)$ e che $z = 0$ sia un polo semplice per $(z+A_2A_1^{-1})^{-1}$.

Se si fanno un po' di conti, si vede che $z = 0$ risulta un polo semplice per $P(z)^{-1}$ e che $\| A_0P(z)^{-1}; L(E)\| \leq c|z|^{-1}$, $0<|z|\leq\varepsilon$ e quindi $m = 1$ nell'Esempio 6.6. Riferendoci ad esempi precedenti, potremmo prendere $1 + \partial^2/\partial x^2$ (con condizioni al bordo nulle) come A_2 e come A_0, A_1 operatori definiti da $a\partial^2/\partial x^2+b$, $c\partial^2/\partial x^2+d$, con a,b,c, opportuni numeri reali.

Esempio 6.8. Si consideri il problemai ai limiti

$$Mu''(t) + (L+c)u(t) = h(t),\ 0<t<1,$$

$$u(0) = u(1) = 0,\ c \in R,\ D(L) \subseteq D(M).$$

Posto $(Bu)(t) = u''(t) + cu(t)$, $D(B) = \{u \in L^P(0,1;X)=E, u',u'' \in E, u(0) = u(1) = 0\}$, sappiamo che se c è scelto opportunamente allora B soddisfa le condizioni di cui parlammo nel § 3.

Naturalmente, M e L sono operatori lineari chiusi soddisfacenti la condizione che $z = 0$ è un polo di moltiplicità finita m per $L(zL+M)^{-1}$. $T = L^{-1}M$ deve essere visto come operatore limitato da $D(L)$ in sé. Sulla parte T_2 di T in $R(T_m)$ si dovrà assumere, per esempio, che

esso soddisfi le condizioni per poter applicare il teorema di perturbazione (relativa alla invertibilità limitata) che si trova in [7, p. 197].

BIBLIOGRAFIA

[1] CAMPBELL S.L.: Singular systems of differential equations, ed PITMAN (1980).

[2] DA PRATO G. - GRISVARD P.: Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. 54(1975), 305--387.

[3] FAVINI A: Abstract potential operators and spectral methods for a class of degenerate evolution problems, J. Diff. Eqs. 39 (1981), 212-225.

[4] FAVINI A: Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems, Rend. Mat. 12 (1979), 511-536.

[5] FAVINI A: Degenerate and singular evolution equations in Banach space, presentato per la pubblicazione.

[6] GANTMACHER F.R.: Theory of Matrices, vol. II, ed. Chelsea (1960).

[7] KATO T.: Perturbation Theory for linear operators, ed. SPRINGER (1966).

[8] LAGNESE J.: Singular differential equations in Hilbert space, SIAM J. Math. Anal. 4 (1973), 623-637.

[9] YOSIDA K.: Functional Analysis, 6ª edizione, ed. SPRINGER (1980).